（平成 30 年度 1 月 1 日）

第 4 回

†東 工 大† 模 試

by @CorSoYuz (@SoYuz_LAMiS)

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 10 ページ，答案用紙の冊子は 5 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に**受験番号**を記入し，下の枠内には受験番号の**下 2 桁**の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて各答案用紙の枠内に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。
6. 問題冊子および答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8. 本番では，以上のことに気をつけて，落ち着いて試験に臨むこと。
9. 本番の試験時間は 180 分ですが，本模試ではおそらく足りなくなると思うので，240 分を目安にして下さい。
10. あけましておめでとうございます。今年もよろしくお願い致します。
11. それでは，どうぞお楽しみ下さい！

試験問題は，つぎのページより始まります。

$\boxed{1}$ (60 点)

正の整数 x，y の方程式

$$x^2 - 68y^2 = 1 \quad \cdots\cdots \ (*)$$

を考える．この方程式の解 $(x,\ y)$ の中で $x + y\sqrt{68}$ の値が最小となるものを $(L,\ H)$ とする．
また，n を正の整数として，x_n，y_n を次のように定める．

$$x_n + y_n\sqrt{68} = (L + H\sqrt{68})^n$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $(X,\ Y)$ が方程式 $(*)$ の解であるとき $(L + H\sqrt{68})^{n-1} < X + Y\sqrt{68} \leqq (L + H\sqrt{68})^n$ ならば $X + Y\sqrt{68} = (L + H\sqrt{68})^n$ であることを示せ．

(2) 方程式 $(*)$ のすべての解は，各 n に対する $(x_n,\ y_n)$ であることを示せ．

(3) $(L,\ H)$ を求めよ．さらに x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n を用いて表せ．

(4) 方程式 $(*)$ の解 $(x,\ y)$ の中で $x + y\sqrt{68}$ の値が 334 番目に小さくなるものに対して，$x + y$ の値を 66 で割ったときのあまりを求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{2}$ (60 点)

n を正の整数とし，文字 1，4，5 を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を Y_n とする． Y_n の要素に対し次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 文字列 1 1 4 が少なくとも 1 回現れる．

以下 Y_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) Y_n の要素のうち条件 $(*)$ を満たさないものの個数を a_n とする．a_{n+3} を a_n，a_{n+1}，a_{n+2} のうち必要なものを用いて表し，漸化式を立てよ．

(2) **(1)** の漸化式の a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3} をそれぞれ 1，x，x^2，x^3 に置き換えて得られる x の方程式 $(**)$ について以下の問に答えよ．

(i) $X = x - 1$ とおいて X についての方程式を導け．

(ii) **(i)** で $X = p + q$ とおくとき，pq，$p^3 + q^3$ の値を求めよ．

(iii) 方程式 $(**)$ の 3 つの解を α，β，γ とする．α，β，γ を求めよ．さらに，A，B，C を定数とするとき，$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$ は **(1)** の漸化式を満たすことを示せ．

(3) $n \geqq 1145141919$ とする．Y_n の要素である文字列を一つ選んだところ，それは条件 $(*)$ を満たし，810 番目の文字は 1，893 番目の文字は 4 であった．このとき，この要素の 810 番目の文字から 893 番目の文字の間に文字列 1 1 4 5 1 4 が 14 回現れる確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{3}$ (60 点)

C を 0 でない実数の定数として，関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ が次の関係式を満たしているとする．

$$f(x)=\left(C+\int_0^x e^{\left(-\int_0^t g(s)ds\right)}h(t)dt\right)e^{\left(\int_0^x g(s)ds\right)}$$

(1) $f'(x)$ を $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を用いて表せ．

(2) a を正の実数として，$g(x)=-af(x)$，$h(x)=af(x)$ とする．また，$F_a(x)=xf(x)$ とする．$0<f(x)<1$ を満たすとするとき，C の取りうる値の範囲を求め $y=\lim_{a\to\infty}F_a(x)$ のグラフの概形を描け．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{4}$ (60 点)

t，r を $t > 1$，$r > 0$ を満たす実数とする．O を原点とする xy 平面において円 C：$(x-t)^2 + (y-t)^2 = r^2$ と双曲線 H：$xy = 1$ が異なる 2 点で接しているとする．

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ．また，r を t を用いて表せ．

(2) C の中心を A，C と H の 2 つの接点を P，Q とする．四角形 OPAQ はどのような形状か．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{5}$ (60 点)

n を自然数とし小さい方から n 番目の素数を p_n とおく．また，正の実数 x に対し x 以下の素数の個数を $\pi(x)$ で表す．たとえば， $\pi(1)=0$，$\pi(3)=2$，$\pi(\sqrt{57})=4$，$\pi(p_n)=n$ である．

この $\pi(x)$ を素数計数関数という．1792 年に当時 15 歳だった Gauss はこれについてある予想をし，その後 1859 年の Riemann の研究を経て，1896 年に Hadamard と de La Vallée Poussin がそれぞれ独立に証明した．その内容とは，次の「素数定理」である．

$$\text{素数定理：}\quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{が成り立つ．}$$

ただし， $A(x) \sim B(x)$ とは $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{B(x)}=1$ が成り立つという意味の記号である．

以下の問に答えよ．ただし，必要ならば素数定理および任意の正の実数 α に対し $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$ であることを用いてよい．

(1) $p_n \sim n\log n$ が成り立つことを示そう．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log p_n}{p_n}=1$ を示せ．さらに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{\log p_n}+\frac{\log\log p_n}{\log p_n}\right)=1$ を示せ．

(ii) $p_n \sim n\log n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}$ とする．このとき $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ が成り立つことを示そう．

(i) $x>4$ に対し $\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dt}{(\log t)^2}<\frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^2}$ を示せ．

(ii) $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 2$ に対し $\displaystyle\vartheta(x)=\sum_{n=1}^{\pi(x)}\log p_n$ とする．このとき $\vartheta(x)\sim x$ が成り立つことを示そう．

ε を $0<\varepsilon<1$ を満たす任意の実数とする．

(i) $\vartheta(x) \leqq \pi(x)\log x$ を示せ．

(ii) $1<x^{1-\varepsilon}<x$ であることを用いて $(1-\varepsilon)(\pi(x)-x^{1-\varepsilon})\log x<\vartheta(x)$ を示せ．

(iii) ε は任意に小さくとれることを用いて $\vartheta(x)\sim x$ が成り立つことを示せ．

（下　書　き　用　紙）

$\boxed{5}$ の作成にあたっては，ブログ「INTEGERS（せきゅーん）」を参考にさせていただきました。

http://integers.hatenablog.com/archive