数学2B　方程式・式と証明

要点整理

整式

x^2y，πabc，100 のように文字や数およびそれらの積で表される式を**単項式**という．
また，数の部分を**係数**，掛けられている文字の個数を**次数**という．

例 1: x^2y の係数は 1，次数は 3.

例 2: πabc の係数は π，次数は 3.（π はギリシャ文字だが「円周率」という数である）

$x^3+2x^2-\frac{\sqrt{3}}{5}x-\pi$ のように複数の単項式を足したり引いたりして表される式を**多項式**という．
また，それぞれの単項式を**項**といい，項の次数の中で最も高いものをその多項式の次数という．

例: $x^3+2x^2-\frac{\sqrt{3}}{5}x-\pi$ の次数は 3.（これは「3 次式である」という）

高校では，単項式と多項式を合わせて**整式**という．

展開・因数分解公式

以下の公式はどれも頻出項目なので必ず暗記すること．

展開:

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　　（式 (1) の b を $-b$ に変えただけ！）

因数分解

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　（二乗・二乗・掛けて符号違い）

(4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　　（二乗・二乗・掛けて符号違い）

二項定理

n を自然数とする．$(a+b)^n$ の展開は次のように考えられる:

$\underbrace{(a+b)^n=(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{ 個}}$ であり，k 番目の項すなわち $a^{n-k}b^k$　$(k=0,1,2,\cdots,n)$

の項は，n 個の括弧の中から b を k 個選ぶ場合の数だけあるので，$a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_nC_k$ である．
これを**二項定理**という．

例: $(3x+4y)^5$ を展開したときに現れる x^3y^2 の項は，${}_5C_3\cdot(3x)^3\cdot(4y)^2=10\cdot 27x^3\cdot 16y^2=4320x^3y^2$

まとめると，次の式が成り立つ．

$$(a+b)^n \ = \ {}_nC_0a^nb^0 \ + \ {}_nC_1a^{n-1}b^1 \ + \ {}_nC_2a^{n-2}b^2 \ + \ \cdots \ + \ {}_nC_{n-1}a^1b^{n-1} \ + \ {}_nC_na^0b^n$$

上式で，$a=1$. $b=1$ とすれば，以下の特殊な公式を得る:

$$2^n \ = \ {}_nC_0 \ + \ {}_nC_1 \ + \ {}_nC_2 \ + \ \cdots \ + \ {}_nC_{n-1} \ + \ {}_nC_n$$

練習問題

(1-1) $(2x-3y)^7$ を展開したときに現れる x^4y^3 の項の係数を求めよ．

(1-2) $(a+b)^8$ を展開せよ．

〈† 参考〉

$(a+b+c)^n$ を展開したときの一般項は $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}a^p\,b^q\,c^r \quad (p+q+r=n,\ p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ r \geqq 0)$
となる．これを**多項定理**という．

恒等式

2 つの文字式を“＝”で結んだもののうち，
文字が特定の値になるときしか成り立たないものを**方程式**，すべての値で成り立つものを**恒等式**という．

例 1: $x^2 = 2x+3$ 　は $x = 3, -1$ でしか成り立たないので方程式である．

例 2: $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ 　は a, b にどんな数を入れても成り立つので恒等式である．

注意

“＝”のある式は方程式や恒等式であるが，“＝”のないものはただの式である．
最低限これらの違いは区別できないといけない．

等式 $A = B$ を証明する（つまり恒等式であることを証明する）方法は次の 3 つである:

(1) A を変形して B にする

(2) A，B を変形してともに同じ式 C にする．

(3) $A-B$ を計算して 0 にする．(重要！)

なお，A も B も正のときは A^2，B^2 について上の方法を考えてもよい．

恒等式になるように文字を求める問題は次の 2 通りの方法で解く:

(1) **係数比較法**：両辺のそれぞれの項の係数が等しいとき，それは恒等式になる．

例: $x^3-1 = ax^3+bx^2+cx+d$ が恒等式になるのは $a=1,\ b=0,\ c=0\ d=-1$ のとき．

(2) **数値代入法**：変数に特定の値を代入して求める文字をあぶり出す．

例: $x^3-1 = a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$ について，両辺に $x = 1, 2, 3$ を順に代入することで d, c, b, a が順に求まる．ただし，この方法では最後に a, b, c, d に求めた値を代入して展開して，本当に成り立つかを確認する必要がある．

練習問題

(2-1) $(x+1)^3-x^2 = ax^3+bx^2+cx+d$ が恒等式となる a, b, c, d の値を求めよ．

(2-2) $x^3-1 = ax(x^2-1)+bx(x-1)+cx+d$ が恒等式となる a, b, c, d の値を求めよ．

不等式

$A(x) \geqq B(x)$ などの不等式を満たす x の範囲を求めることを**不等式を解く**という．また，すべての x で成り立つ不等式を**絶対不等式**という．

不等式 $A \geqq B$ を証明する（つまり絶対不等式であることを証明する）には次のようにする:

（左辺）$-$（右辺）$= A - B$ を変形して，0 以上であるとすぐにわかるような式 C にする．

例: $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ を証明する．

（左辺）$-$（右辺）$= a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ であり，$(a-b)^2 \geqq$ はすぐわかるから証明終わり．

相加・相乗平均の関係

2 つの正の数 a, b に対して常に次の不等式が成り立つ．これを**相加・相乗平均の関係**という．

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab} \qquad \text{（等号が成り立つのは } a = b \text{ のとき）}$$

例: $x > 0$ のとき，関数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ の最小値について（公式の a，b をそれぞれ x，$\frac{1}{x}$ と考える）

$x > 0$，$\frac{1}{x} > 0$ であるから，相加・相乗平均の関係より $f(x) = x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

等号が成り立つのは $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ のとき（$x > 0$ だから $x = -1$ は不適）

よって，$f(x)$ の最小値 2（$x = 1$）

練習問題

(3-1) $x > 0$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ の最大値を求めよ．

練習問題の略解

(1-1) ${}_7C_3 \cdot 2^4 \cdot (-3)^3 = -15120$

(1-2) ${}_8C_0 a^8 b^0 + {}_8C_1 a^7 b^1 + {}_8C_2 a^6 b^2 + {}_8C_3 a^5 b^3 + {}_8C_4 a^4 b^4 + {}_8C_5 a^3 b^5 + {}_8C_6 a^2 b^6 + {}_8C_7 a^1 b^7 + {}_8C_8 a^0 b^8$
$= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

(2-1) $(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 2,\ 3,\ 1)$

(2-2) $(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 0,\ 1,\ -1)$　　（$x - 0, 1, -1$ を順に代入する）

(3-1) 最大値 3 $(x = 1)$　　（分母分子を x で割ると分母の最小値が求まる）

複素数

二乗して -1 となる数 $\sqrt{-1}$ を**虚数単位**といい，記号 i で表す．すなわち，$i^2 = -1$

実数 a, b と虚数単位 i を組み合わせて $a + bi$ と表される数を**複素数**といい，a を実部，b を虚部という．
b が 0 でないときを**虚数**という．また，複素数 $z = a + bi$ に対して $\bar{z} = a - bi$ を z の**共役複素数**という．

複素数の計算例:

(1) $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

(2) $(5 + 2i) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}i) = (5 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{2})i$

(3) $(3 + 4i)(2 + 5i) = 6 + 23i + 20i^2 = 6 + 23i - 20 = -14 + 23i$

(4) $\dfrac{2+i}{3+4i} = \dfrac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{6-5i-(-4)}{9-(-16)} = \dfrac{10-5i}{25} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$

二次方程式

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式は $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であるが，$\sqrt{\ }$ の中身すなわち判別式 D が負になるときは，解 x が虚数になる．
いままでは解なしとして扱ってきたが，今後はこの虚数も解に含める．

$D > 0$: 異なる 2 つの実数解，　$D = 0$: 重解，　$D < 0$: 異なる 2 つの虚数解（これらは共役複素数になる）

解と係数の関係

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次のように和と積がすぐに求まる．
これを**二次方程式の解と係数の関係**という．

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例: 二次方程式 $3x^2 - 4x - 5 = 0$ 2 つの解を α, β とすると，$\alpha + \beta = -\dfrac{-4}{3} = \dfrac{4}{3}$，$\alpha\beta = \dfrac{-5}{3} = -\dfrac{5}{3}$

$\alpha^2 + \beta^2$ などの対称式の値を求めるときは上手く変形をする．(次の下線部は暗記必須)
例: 二次方程式 $x^2 + 2x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とすると，解と係数の関係より
　$\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = 3$ であり，

(1) $\underline{\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta} = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2$

(2) $\underline{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)} = (-2)^3 - 3 \cdot 3 \cdot (-2) = 10$

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{-2}{3} = -\dfrac{2}{3}$

例: 足して 2，掛けて 3 となる 2 数は二次方程式 $x^2 - \underset{\alpha+\beta}{\underline{2}}\,x + \underset{\alpha\beta}{\underline{3}} = 0$ の解なので，$1 \pm \sqrt{2}i$ が答え．

解が実数のときその符号は，判別式 D などを用いて次のように分類できる:

(1) α, β がともに正 $\iff$ $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$, $D>0$

(2) α, β がともに負 $\iff$ $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$, $D>0$

(3) α, β のうち一方は正で他方は負 $\iff$ $\alpha\beta<0$ (判別式の条件は不要)

例: 二次方程式 $x^2+4x+k+2=0$ が正の解と負の解を持つ条件は，$k+2<0$ すなわち $k<-2$

〈†参考〉

三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 2 つの解を α, β, γ とするとき，
次の関係式を**三次方程式の解と係数の関係**という．

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\,,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}\,,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

例: 三次方程式 $x^3+3x^2+4x-2=0$ の 2 つの解を α, β, γ とすると，解と係数の関係より
$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=2$ であり，

(1) $\underline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}=(-3)^2-2\cdot 4=1$

(2) $\underline{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma}$
$=-3\cdot(1-4)+3\cdot 2=15$

剰余の定理

整式 $P(x)$ を一次式 $x-\alpha$ で割ったあまりは次のようにして割り算せずに求められる:

整式 $P(x)$ を一次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$，あまりを R とおくと，
割る式が一次式なのでそのあまり R は定数であり，次の関係式が成り立つ．

$$P(x) \;=\; (x-\alpha)Q(x) \;+\; R$$

いま求めたいのはあまり R であるから，$Q(x)$ の項が邪魔である．そこで，上式に $x=\alpha$ を代入することで $Q(x)$ の項が消え，$R=P(\alpha)$ となる．つまり，求めるあまりは $P(x)$ に $x=\alpha$ を代入したものになる！

上記の話を**剰余の定理**という．これは，割り算をしないであまりを求める定理である．

割る一次式が $x-\alpha$ ではなく $ax+b$ のときは，$Q(x)$ の項が消えるのは $x=-\frac{b}{a}$ を代入したときなので，
$P(x)$ を $ax+b$ で割ったあまりは $P(-\frac{b}{a})$ となる．

例 1: $P(x)=x^{99}-x+1$ を $x+1$ で割った余りは $P(-1)=(-1)^{99}-(-1)+1=1$
例 2: $P(x)=x^{10}-x+1$ を $2x+1$ で割った余りは $P(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^{10}-(-\frac{1}{2})+1=\frac{1}{1024}+\frac{1}{2}+1=\frac{1537}{1024}$

因数定理

$P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったあまりが 0 になるとき，$P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れるといい，このとき，$P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ.（つまり，$x-\alpha$ で因数分解できる！）そして，その条件は剰余の定理より $P(\alpha)=0$ である．

つまり，$P(x)$ にある数 α を代入して 0 になれば，$P(x)$ は $x-\alpha$ で因数分解できる．
これを**因数定理**という．因数定理は「因数分解を補助する定理」なのだ！

例 1: $P(x)=x^3-x^2+x-6$ とすると，$P(2)=2^3-2^2+2-6=8-4+2-6=0$ となるので，
$P(x)$ は $x-2$ で因数分解できることがわかる．実際に $P(x)$ を $x-2$ で割り算することで，
$P(x)=(x-2)(x^2+x+3)$ と因数分解を求められる．

例 2: $P(x)=x^3+ax^2-x+b$ が $x-1$，$x-2$ の両方で割り切れる a,b を求める．
因数定理より，その条件は $P(1)=0$，$P(2)=0$ であるから，それぞれ計算すると，
$P(1)=a+b \underbrace{=0}_{\text{因数定理より}}$
$P(2)=4a+b+6 \underbrace{=0}_{\text{因数定理より}}$
これらを連立することで，$a=-2$，$b=2$ と求まる．

〈† 参考〉

$P(x)$ に代入して 0 となる α は，必ず $P(x)$ の定数項の約数である．したがって，その約数をすべて代入しても 0 にならない場合，$P(x)$ は一次式では因数分解できない．

例: $P(x)=x^3+3x^2+x+2$ の定数項は 2 であり，そのすべての約数である ±1，±2 を代入しても 0 にならないので，$P(x)$ は一次式で因数分解できない．

高次方程式

わたしたちは，一次方程式と二次方程式については解の公式を知っているので必ず解くことができる．
しかし，三次以上の方程式については解の公式を知らないので，簡単には解くことができない．
このため，三次以上の方程式を**高次方程式**という．ここでは，高次方程式の解き方を考える．

高次方程式の考え方

たとえば，次の問題を考えてみよう．
問題: $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とする．方程式 $f(x) = 0$ を解け．

この問題の意味は「$f(x)$ が 0 となる x をすべて見つけてください」ということである．
したがって，この答えは $\underline{x = 1, 2, 3, 4}$ とすぐにわかる．

ここで，$f(x)$ を展開してみる．頑張って計算すると，$f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ となる．
そうすると，方程式 $f(x) = 0$ は四次方程式 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ と同じものであり，先ほど求めた<u>解 $x = 1, 2, 3, 4$ は，実は四次方程式 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ の解</u>だったのである！

上記の例では知らないうちに四次方程式を解いていた．なぜ解けたのだろうか？
それは，方程式の左辺を因数分解した形を見ていたからである．

つまり，**どんな複雑な高次方程式** $f(x) = 0$ **でも，**$f(x) = (\ ①\ )(\ ②\ )\cdots(\ ⓝ\ )$ **と因数分解さえできれば，**$(\ ①\ )$ から $(\ ⓝ\ )$ **までのかっこの中身が** 0 **になる** x **を見つけることで，その方程式を解いたことになる**のだ！

ここで，$(\ ①\ )$ から $(\ ⓝ\ )$ までのかっこの中身はどうなっていれば良いだろうか？
それは<u>一次式か二次式となれば良い</u>．なぜならば，このとき，かっこの中身を 0 にする x は一次方程式か二次方程式を解けば良いことになり，必ず求められるからである．

そして，その因数分解をするときに使うのが因数定理である．因数定理は高次方程式を解くときの因数分解に使うために習ったと言っても過言ではない．

高次方程式の解き方

高次方程式 $f(x) = 0$ は次のようにして解く．

(1) $f(x)$ を $(\ ①\ )(\ ②\ )\cdots(\ ⓝ\ )$ と因数分解する．(かっこの中身はすべて一次式か二次式)
このとき，因数定理を利用する．

(2) それぞれのかっこの中身を 0 にする x をすべて求める．
このとき，一次方程式または二次方程式を解くことになる．

(3) 得られたすべての x が，元の方程式 $f(x) = 0$ の解である．

例 1: 三次方程式 $x^3-2x^2-6x+9=0$ を解け.

解: $f(x)=x^3-2x^2-6x+9$ とおく．まず，$f(x)$ を因数分解しよう.
$x=3$ を代入してみると $f(3)=27-18-18+9=0$ となるから，
因数定理より $f(x)$ は $x-3$ で因数分解できる.

$f(x)\div(x-3)$ を計算すると x^2+x-3 となるから，
$f(x)=(x-3)(x^2+x-3)$ と因数分解できることがわかった.

つまり，元の方程式 $f(x)=0$ の解は，

$\underline{(x-3)}\,\underline{\underline{(x^2+x-3)}}=0$ の解

すなわち，　$\underline{(x-3)}=0$ の解　または　$\underline{\underline{(x^2+x-3)}}=0$ の解

すなわち，　$\underline{x=3}$　または　$\underline{\underline{x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}}}$

以上より，三次方程式 $x^3-2x^2-6x+9=0$ の解は $x=3$，$\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

〈† 参考: 1の三乗根〉

方程式 $x^3=1$ の解は $x=1$，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である．この虚数解のうちどちらかを ω（オメガ）と書く.
どちらを ω に選んでも，次の性質が成り立つ.

(1) $\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$

(3) $\omega^2=\overline{\omega}$

例: $\omega^{99}+\omega^{98}+\omega^{97} \;=\; (\omega^3)^{33}+\omega^2(\omega^3)^{32}+\omega(\omega^3)^{32} \;=\; 1+\omega^2+\omega \;=\; 0$

応用問題

$x^{99}+2x^{98}+2x+1$ を x^3+1 で割ったあまりを求めよ.

〈† 参考: 解の共役性〉

係数がすべて実数である方程式が複素数 $z=a+bi$ を解に持つならば，その共役複素数 $\overline{z}=a-bi$ も必ず解となる.

例: 方程式 $x^2-ax+1=0$ の解の一つが $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるとき，もう一つの解と実数 a の値を求めよ.

解: 共役複素数も解になるから，もう一つの解は $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ であり，
解と係数の関係より，$a=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1$